TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS- 1

1. Compruebe, utilizando las ecuaciones de movimiento, que las 4-corrientes (ρ , $\mathbf{j}$) se conservan (tienen 4-divergencia cero), en los casos:

i. Ec. de Schrodinger

ii. Ec. de Klein Gordon

iii. Ecuación de Dirac.

2. Verifique que si se multiplica la ecuación de Dirac con interacción

$$(i\not{\partial} + e\not{A} - m)\,\psi = 0$$

Por el operador

$$(i\not{\partial} + e\not{A} + m)$$

se obtiene

$$\left((i\partial + eA)^2 - m^2 + \frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)\psi = 0\,.$$

Discuta el significado físico de cada término.

3. Escriba la densidad lagrangeana que da lugar a la ecuación de Schrodinger. Teniendo en cuenta que esta última es invariante por transformaciones de fase obtenga la corriente asociada con esta simetría.

4.

i. Demuestre que d^4p es invariante Lorentz.

ii. Demuestre, considerando explícitamente una transformación de Lorentz, que d^3p/E_p es invariante Lorentz.

iii. Verifique que el signo de p_0 es invariante ante transformaciones de Lorentz propias.

5. i. Use las reglas de conmutación para el campo de Klein-Gordon real para demostrar:

$$[H,\phi(x)] = -i\pi(x), \quad [H,\pi(x)] = i(m^2 - \nabla^2)\phi(x)\,.$$

ii. De estas ecuaciones y de las ecuaciones de movimiento de Heisenberg para los campos demuestre:

$$\dot{\phi}(x) = \pi(x), \quad (\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0\,.$$

6.

i. Demuestre para el campo de Klein-Gordon, utilizando las reglas de conmutación y la expresión para el operador **P** :

$$\left[\vec{P}, \phi(x)\right] = i\vec{\nabla}\phi(x), \quad \left[\vec{P}, \pi(x)\right] = i\vec{\nabla}\pi(x)\,.$$

ii. Si F(x) es una función del campo y el momento conjugado canónico, desarrollable en serie de potencias, demuestre que :

$$\left[\vec{P}, F(x)\right] = i\vec{\nabla}F(x)\,.$$

iii. Escriba la ecuación de Heisenberg para F(x) y muestre que se puede escribir en forma explícitamente covariante:

$$[P^{\mu}, F(x)] = -i\partial^{\mu}F(x)$$

Con $P^0 = H$. Utilizando estos resultados compruebe que el operador cuadriomomento P^{μ} es el generador de traslaciones

$$\phi(x+a) = e^{ia\cdot P}\phi(x)e^{-ia\cdot P}\,.$$

7. Considere la lagrangeana que da lugar a la ecuación de Schrodinger.

i. Desarrolle las soluciones en ondas planas y proceda a aplicar la cuantificación canónica. ¿Tiene sentido un campo de Schrodinger real?

ii. Obtenga el hamiltoniano en función de los operadores de creación y destrucción. ¿Es definido positivo?

iii. Obtenga la corriente asociada con un cambio de fase que es simetría de esta teoría y calcule la carga conservada. Exprese en términos de los operadores de creación y destrucción. Interprete.

iv. Calcule el conmutador de dos campos a tiempos diferentes.