TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS- 2

8. Matrices de Dirac: demuestre las siguientes igualdades

i.

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4, \quad \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu, \quad \gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma_\mu = 4g^{\sigma\rho}, \quad \gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = -2\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma$$

$$\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = 12\, I_4, \quad \gamma^\mu\gamma_5\gamma_\mu = -4\gamma_5, \quad \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5\gamma_\mu = 2\gamma^\mu\gamma_5$$

$$\gamma^\mu \not{a} \gamma_\mu = -2\not{a} \qquad \gamma^\mu \not{a}\not{b}\gamma_\mu = 4\, a\cdot b \qquad \gamma^\mu \not{a}\not{b}\not{c}\gamma_\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a}$$

ii.

$$\mathrm{Tr}\{I\} = 4, \quad \mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\} = 0, \quad \mathrm{Tr}\{\gamma_5\} = 0,$$

$$\mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu\} = 4g^{\mu\nu}, \quad \mathrm{Tr}\{\gamma_5\gamma^\mu\} = 0, \quad \mathrm{Tr}\{\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\} = 0,$$

$$\mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho\} = 4\left(g^{\mu\nu}g^{\sigma\rho} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\right), \ \mathrm{Tr}\{\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho\} = -4i\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho},$$

$$\mathrm{Tr}\left\{\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\ldots\gamma^{\mu_{2n}}\gamma^{\mu_{2n+1}}\right\} = 0, \quad \mathrm{Tr}\left\{\gamma^5\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\ldots\gamma^{\mu_{2n}}\gamma^{\mu_{2n+1}}\right\} = 0$$

siendo $\epsilon^{0123} = 1$.

iii. Demuestre que la base de matrices de Dirac considerada en clase es efectivamente una base.

9. Encuentre la matriz $S(\Lambda)$ para un "boost" con velocidad v en la dirección z.

10. En el sistema de la partícula en reposo p = (m , **0**) se define el cuadrivector polarización s = (0, **n**) con $\mathbf{n}^2 = 1$. Demuestre que en el sistema en movimiento, con p = (E, **p**) en cuadrivector s es

$$s^\mu = \left(\frac{\vec{k}\,\vec{n}}{m}, \, \vec{n} + \frac{(\vec{k}\,\vec{n})\,\vec{k}}{m\,(E+m)}\right)$$

11. Dadas dos soluciones de la ecuación de Dirac $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$ demuestre la descomposición de Gordon:

$$\bar{\psi}_2\,\gamma_\mu\,\psi_1 = \frac{i}{2m}\left(\bar{\psi}_2\,\overleftrightarrow{\partial}_\mu\,\psi_1\right) + \frac{1}{2m}\,\partial^\nu\left(\bar{\psi}_2\,\sigma_{\mu\nu}\,\psi_1\right)$$

12. A partir del hamiltoniano del campo de Dirac

$$H = \int d^3\vec{x}\,\bar{\psi}(x)\left(-i\vec{\gamma}\vec{\nabla} + m\right)\psi(x)$$

y de las reglas de anticonmutación compruebe que las ecuaciones de movimiento de Heisenberg

$$-i\dot{\psi}(x) = [H, \psi(x)], \ -i\dot{\psi}^\dagger(x) = \left[H, \psi^\dagger(x)\right]$$

son equivalentes a la ecuación de Dirac.

13. Compruebe que el operador densidad de corriente

$$j^\mu = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$$

de la ecuación de Dirac satisface la relación de microcausalidad:

$$\left[j^\mu(x), j^\nu(x')\right] = 0, \quad para\ (x-x')^2 < 0$$

14. Demuestre, a partir del desarrollo en ondas planas del campo de Klein-Gordon real, que si se imponen relaciones de anti-conmutación entonces no de satisface la microcausalidad.

15. Considere el lagrangeano de Dirac y defina los campos izquierdos y derechos

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi, \quad \psi_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi,$$

que verifican

$$\gamma_5\psi_L = -\psi_L \; y \; \gamma_5\psi_R = \psi_R$$

i. Compruebe que bajo transformaciones de Lorentz los campos se transforman sin mezclarse de igual forma que el campo de Dirac.

ii. Compruebe que el lagrangeano de Dirac puede escribirse como

$$\mathscr{L} = i\overline{\psi_L}\partial\!\!\!/\psi_L + i\overline{\psi_R}\partial\!\!\!/\psi_R - m(\overline{\psi_L}\psi_R + \overline{\psi_R}\psi_L)$$

que es explícitamente invariante Lorentz.

iii. Escriba las ecuaciones de movimiento para estos campos y compruebe que en el límite de masa nula las componentes izquierdas y derechas se desacoplan y que, en particular, el campo izquierdo describe fermiones de helicidad negativa y antifermiones de helicidad positiva (y para el campo derecho lo inverso).

iv. Escriba nuevamente el lagrangeano y las ecuaciones de movimiento en términos de los espinores de dos componentes utilizando la representación de Weyl para las matrices de Dirac.